第 I 卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将你认为正确的选项代号涂填在选择题的答题卡内．

1 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

抛物线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 的焦点坐标是(　　)

A. $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(0,-\frac{1}{8}\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{8}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

答案

B

解析

抛物线 $x^2=-\frac{1}{2}y$ 中，$2P=\frac{1}{2}$，所以 $p=\frac{1}{4}$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{8}$，焦点在 y 轴的负半轴，所以焦点坐标为 $\left(0,-\frac{1}{8}\right)$．

故选 B

2 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $x-y+a=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 a 的值为(　　)

A. -1 或 -3　　B. -1 或 3　　C. 1 或 -3　　D. 1 或 3

答案

C

解析

$(x-1)^2+y^2=1$ 圆心为 $(1,0)$ 半径为 1，圆心到直线 $x-y+a=0$ 的距离为 $d=\frac{|1+a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．

$a=1$ 或 -3．

故选 C

3 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

用样本估计总体的统计思想在我国古代数学名著《数书九章》里就有记载，如“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为(　　)

A．169 石　　B．268 石　　C．338 石　　D．1500 石

答案

A

解析

由题意可知：这批米内夹谷约为 $1534\times\dfrac{28}{254}\approx 169$ 石

故选 A

4 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

已知双曲线的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，离心率是 $\dfrac{5}{3}$，则双曲线的渐近线方程为(　　)

A．$y=\pm\dfrac{3}{4}x$　　B．$y=\pm\dfrac{4}{3}x$　　C．$y=\pm\dfrac{4}{5}x$　　D．$y=\pm\dfrac{5}{4}x$

答案

B

解析

双曲线的离心率是 $\dfrac{5}{3}$，即 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore 1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{25}{9}$

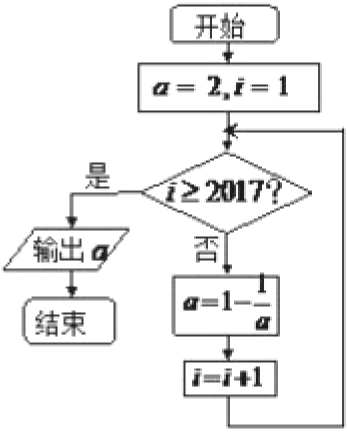
$\therefore \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{16}{9}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$ 因为焦点在 x 轴上，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

故选 B

5 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

如下图所示的程序框图的运行结果为(　　)



A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

答案

D

解析

$a=2$，$i=1$ 进入

第一次循环：$a=\frac{1}{2}$，$i=2$

第二次循环：$a=-1$，$i=3$

第三次循环：$a=2$，$i=4$

第四次循环：$a=\frac{1}{2}$，$i=5$ 很明显循环周期为 3，故 $2018=672\times3+2$，所以 $a=\frac{1}{2}$.

故选 D

6 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

某班有 50 名学生，男女人数不等．随机询问了该班 5 名男生和 5 名女生的某次数学测试成绩，用茎叶图记录如下图：

男生成绩		女生成绩
4 2 0	9	3 3 3
8 6	8	8 8

则下列说法一定正确的是(　　)

A．这种抽样方法是一种分层抽样

B．这 5 名男生成绩的中位数大于这 5 名女生成绩的中位数

C．该班男生成绩的平均数大于该班女生成绩的平均数

D．这 5 名男生成绩的标准差大于这 5 名女生成绩的标准差

答案

D

解析

A．若抽样方法是分层抽样，因为男生女生不等，所以分别抽取的人数不等，所以 A 错；

B．由题目看不出是系统抽样，所以 B 错；

C．该班男生成绩的平均数为：$\dfrac{90+92+94+88+86}{5}=90$，女生的平均数为：$\dfrac{90\times3+3+3+3+3+80\times2+8+8}{5}=91$，所以 C 错；

D．这 5 名男生成绩的方差为 $\dfrac{1}{5}(2^2+4^2+2^2+4^2)=8$，女生的方差为 $\dfrac{1}{5}(2^2\times3+3^2\times2)=6$ 男生方差大于女生方差，所以男生标准差大于女生标准差，所以 D 对．

故选 D

7 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

给出下列说法：

① 方程 $x^2+y^2-2x+4y+6=0$ 表示一个圆；

② 若 $m>n>0$，则方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆；

③ 已知点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$ 若 $|PM|-|PN|=2$，则动点 p 的轨迹是双曲线的右支；

④ 以过抛物线焦点的弦为直径的圆与该抛物线的准线相切．其中正确说法的个数是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案

B

解析

方程 $x^2+y^2-2x+4y+6=0=(x-1)^2+(y+2)^2=-1$ 不表示圆，故 ① 错；

若 $m>n>0$，则方程 $mx^2+ny^2=1$ 即 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}$

$\because m>n>0$

$\therefore \frac{1}{m}<\frac{1}{n}$ 所以表示焦点在 y 轴上的椭圆，故 ② 对；

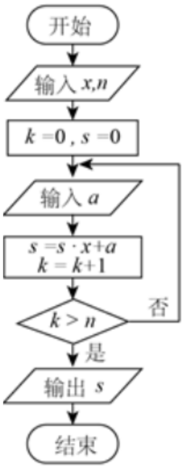
已知点 $M(-1,0)$、$N(1,0)$，若 $|PM|-|PN|=2=|MN|$，所以动点 p 的轨迹是一条直线故 ③ 错；

以过抛物线焦点的弦为直径的圆与抛物线准线的位置关系是相切，故 ④ 对；

故选 B

8 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

我国古代有计算多项式值的秦九韶算法，下图是实现该算法的程序框图．执行该程序框图，若输入的 $x=2$ ，$n=2$，依次输入的为 1，3，5，则输出的 s 值为(　　)



A．17　　B．12　　C．15　　D．5

答案

C

解析

∵ 输入的 $x=2$，$n=2$，

当输入的 a 为 1 时，$s=1$，$k=1$，进入下一次循环；

当再次输入的 a 为 3 时，$s=5$，$k=2$，进入下一次循环；

当输入的 a 为 5 时，$s=15$，$k=3$，退出循环的条件；

故输出的 s 值为 15．

故选 C

9 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

两圆 $x^2+y^2+2ax+a^2-4=0$ 和 $x^2+y^2-2by+b^2-1=0$ 相外切，且 $ab\neq 0$，则 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 的最大值为(　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. 1　　C. $\dfrac{9}{4}$　　D. 9

答案

C

解析

$x^2+y^2+2ax+a^2-4=0$ 即 $(x+a)^2+y^2=4$，圆心 $(-a,0)$ 半径为 2；$x^2+y^2-2by+b^2-1=0$ 即 $x^2+(y-b)^2=1$ 圆心为 $(0,b)$ 半径为 1；因为两圆 $x^2+y^2+2ax+a^2-4=0$ 和 $x^2+y^2-2by+b^2-1=0$ 相外切，所以 $\sqrt{a^2+b^2}=3\therefore a^2+b^2=9$ 又 $a^2+b^2\geqslant 2ab$

$\therefore ab\leqslant\dfrac{9}{2}$

$\therefore\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}\leqslant\dfrac{\frac{81}{4}}{9}=\dfrac{9}{4}$

当且仅当 $a=b=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ 时取等号，

故 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 的最大值为 $\dfrac{9}{4}$.

故选 C

10 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

直线与抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 交于 A，B 两点，O 为坐标原点，$OA\perp OB$，且 $OD\perp AB$，垂足为点 $D(1,2)$，则抛物线的准线方程是(　　)

A. $x=-\frac{4}{5}$　　B. $x=-\frac{2}{5}$　　C. $x=-\frac{5}{2}$　　D. $x=-\frac{5}{4}$

答案

D

解析

因为点 $D(1,2)$，$\therefore k_{OD}=2$ 又 $OD\perp AB$ 且 AB 过 $D(1,2)$ 则直线 AB 的方程 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$ 整理得 $x+2y-5=0$，设点 $A(x_1,y_1)$ 点 $B(x_2,y_2)$ 由 $OA\perp OB$

则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{0}$ 即 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 则 AB 的直线方程为 $x=5-2y\therefore y_1y_2-2(y_1+y_2)+5=0$ ①

则 $\begin{cases}y^2=2px\\x=5-2y\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4py-10p=0$，

$\therefore y_1+y_2=4p$，$y_1y_2=-10p$　②

把 ② 代入解得 $p=\frac{5}{2}$ 所以准线方程为 $x=-\frac{5}{4}$.

故选 D

11 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

已知直线 l 过椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F，与椭圆 C 交于 M，N 两点．点 P，Q 是椭圆 C 上关于坐标原点 O 对称的两点，且 $PQ//MN$，则 $\frac{|PQ|^2}{|MN|}=($　　$)$

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

答案

A

解析

当直线斜率不存在时，$|PQ|^2=4b^2$，$|MN|=\frac{2b^2}{a}$

$\therefore W=\frac{|PQ|^2}{|MN|}=\frac{4b^2}{\frac{2b^2}{a}}=2a=2\sqrt{3}$；当直线斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$

且 $M(x_1,y_1)N(x_2,y_2)$ 直线 $y=k(x-1)$ 代入椭圆方程，消去 y 可得 $(3k^2+2)x^2-6k^2x+3k^2-6=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{6k^2}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-6}{2+3k^2}$，

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2+3k^2}$ 把直线 $y=kx$ 代入椭圆方程，消去 y，并整理得：

$x^2=\frac{6}{2+3k^2}$

设 $A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$，

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|=2\sqrt{\frac{6(1+k^2)}{2+3k^2}}$

$$\therefore W=\frac{|PQ|^2}{|MN|}=\frac{\frac{24(1+k^2)}{2+3k^2}}{\frac{4\sqrt{3}(1+k^2)}{2+3k^2}}=2\sqrt{3}.$$

故选 A

备注

【点睛】：本题考查了直线与椭圆的位置关系，要先考虑直线斜率不存在时，斜率存在时主要是利用弦长公式进行表示，需要计算准确认真．

12 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，P 是双曲线右支上一点，I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，PI 交 x 轴于 Q 点，若 $|F_1Q|=|PF_2|$，且 $PI:IQ=2:1$，则双曲线的离心率 e 的值为(　　)

A．2　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{5}{3}$

答案

B

解析

因为 I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，所以 I 是三个内角角平分线的交点，在三角形 $\triangle PF_1Q$ 中，根据角平分线性质定理有 $\frac{PF_1}{F_1Q}=\frac{PI}{IQ}=\frac{2}{1}$

$\because PF_2=F_1Q$

$\therefore \frac{PF_1}{PF_2}=\frac{2}{1}$

$\because PF_1-\mathrm{PF}_2=2a$

$\therefore PF_1=4a$，$PF_2=2a$，

$\therefore F_1Q=2a$ 在三角形 PF_2Q 中，$\frac{PF_2}{F_2Q}=\frac{PI}{IQ}=\frac{2}{1}$

$\therefore F_2Q=a \because F_1Q+F_2Q=2c$

$\therefore 3a=2c$

$\therefore e=\frac{3}{2}$.

故选 B

备注

点睛：三角形内心是角平分线交点，利用角平分线性质定理得长度比，再利用双曲线的定义即可得出基本量 a 与 c 的关系．

第 II 卷（非选择题共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡内相应题号对应的横线上．

13 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

某校老年教师 90 人、中年教师 180 人和青年教师 160 人，采用分层抽样的方法调查教师的身体状况，在抽取的样本中，青年教师有 32 人，则该样本的中年教师人数为_______.

答案

36

解析

由题意，老年和青年教师的人数比为 $90:160=9:16$，因为青年教师有 32 人，所以老年教师有 18 人.

14 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

已知点 $P(a,b)$ 关于直线 l 的对称点为 $P'(b,a)$，则圆 C：$x^2+y^2-4x-2y=0$ 关于直线 l 对称的圆 C' 的标准方程为________________________.

答案

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

解析

点 $P(a,b)$ 关于直线 l 的对称点为 $P'(b,a)$，则直线 l 的方程为 $y=x$，

圆 C：$x^2+y^2-4x-2y=0$ 的圆心为 $(2,1)$ 半径为 $\sqrt{5}$，

所以圆 C 关于直线 l 对称的圆 C' 的圆心为 $(1,2)$ 半径为 $\sqrt{5}$ 所以圆 C' 的标准方程为

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

故答案为：$(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

15 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\dfrac{1}{3}$ 的直线 l，l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，则椭圆的离心率为________.

答案

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解析

设 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$ 利用点差法得 $\begin{cases}\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1\\ \dfrac{{x_2}^2}{a^2}+\dfrac{{y_2}^2}{b^2}=1\end{cases}$

$\therefore \dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$

因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，所以 M 为 AB 的中点，$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ y_1+y_2=2\end{cases}$ 又直线 l 的斜率为 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{3}$ 所以

$\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{2}{3b^2}=0$

$\therefore \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

16 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

平面内与两定点 $A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)(a>0)$ 连线的斜率之积等于非零常数 m 的点的轨迹，加上 A_1、A_2 两点所成的曲线 C 可以是圆、椭圆或双曲线．给出以下四个结论：

① 当 $m=-1$ 时，曲线 C 是一个圆；

② 当 $m=-2$ 时，曲线 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

③ 当 $m=2$ 时，曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$；

④ 当 $m\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ 时，曲线 C 的焦点坐标分别为 $\left(0,-a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}\right)$ 和 $\left(0,a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}\right)$

．其中全部正确结论的序号为________．

答案

①②④

解析

设所求点 $P(x,y)$ 则由题意得 $\dfrac{y+a}{x}\cdot\dfrac{y-a}{x}=m$

$\therefore x^2-\dfrac{y^2}{m}=-\dfrac{a^2}{m}$

对于 ① 当 $m=-1$ 时，曲线 C 为 $x^2+y^2=a^2$ 表示一个圆，故 ① 对；

对于 ② 当 $m=-2$ 时，曲线 C 为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$，$e=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 ② 对；

对于 ③ 当 $m=2$ 时，曲线 C 为 $\dfrac{y^2}{2}-x^2=\dfrac{a^2}{2}$

$\therefore$ 渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，故 ③ 错；

对于 ④ 当 $m\in(-\infty,-1)$ 时，曲线 C 为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{-\dfrac{a^2}{m}}=1$

$\because m<-1$

$\therefore -\dfrac{a^2}{m}<a^2$ 曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆，$\therefore c=\sqrt{a^2-\left(-\dfrac{a^2}{m}\right)}=a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}$

所以曲线 C 的焦点坐标分别为 $\left(0,-a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}\right)$ 和 $\left(0,a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}\right)$．

当 $m\in(0,+\infty)$ 时，曲线 C：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{m}}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线，

$\therefore c=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{m}}=a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}$ 所以曲线 C 的焦点坐标分别为 $\left(0,-a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}\right)$ 和 $\left(0,a\sqrt{1+\dfrac{1}{m}}\right)$，

故 ④ 对．

故答案为：①②④．

备注

【点睛】：本题考查了轨迹问题，可以根据题意直接表示出来即可，考查了曲线方程的表示，根据参数 m 的范围确定，也考查了圆锥曲线的性质，注意双曲线的渐近线方程一定要看准焦点的位置是在 x 轴还是 y 轴；

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17 2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷

已知圆 C：$x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 上存在两点关于直线 l：$x+my+1=0$ 对称．
(1) 求实数 m 的值；
(2) 在 (1) 的条件下，过点 $M(m,m)$ 作圆 C 的两条切线，切点分别为 P，Q，试求 $|PQ|$ 的值．

(1)

答案

1

解析

【分析】：依题意，直线 l：$x+my+1=0$ 过圆心 $(1,-2)$，得 $m=1$．

圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=4$，依题意，直线 l：$x+my+1=0$ 过圆心 $(1,-2)$，$\therefore 1-2m+1=0$，即 $m=1$．

(2)

答案

$\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

解析

【分析】：$M(1,1)$ 则 $|MC|=3$，$|PC|=2$，

$\therefore |PM|=\sqrt{5}$．设点 P 到直线 MC 的距离为 d，根据 $\triangle PMC$ 等面积法可得 d，所以 $|PQ|=2d$ 即可求．

在 (1) 的条件下，$m=1$，

$\therefore M(1,1)$，

则 $|MC|=3$，$|PC|=2$，

$\therefore |PM|=\sqrt{5}$．

设点 P 到直线 MC 的距离为 d，

有 $\dfrac{1}{2}|MC|\cdot d=\dfrac{1}{2}|PC|\cdot|PM|$，

$\therefore d=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore |PQ|=2d=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$．

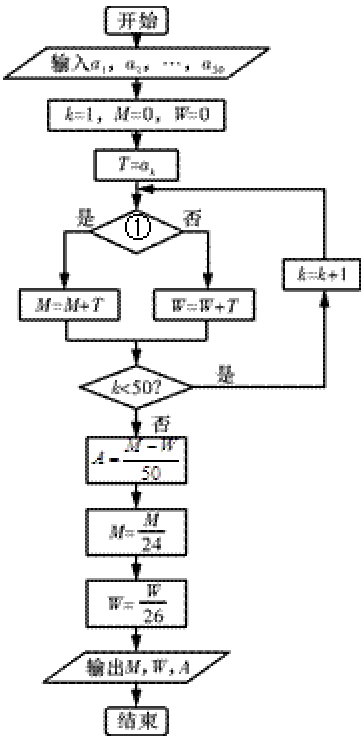
18 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

在一次“汉马”（武汉马拉松比赛的简称）全程比赛中，50 名参赛选手（24 名男选手和 26 名女选手）的成绩（单位：分钟）分别为数据 a_1，a_2，$\ldots$，a_{50}（成绩不为 0）．

(1) 24 名男选手成绩的茎叶图如图所示，若将男选手成绩由好到差编为 $1\sim 24$ 号，再用系统抽样方法从中抽取 6 人，求其中成绩在区间 $[150,170)$ 上的选手人数；

15	0 0 1 2 3
16	1 1 1 2 2 3 3 4 5 5 6
17	0 1 2 2 3 3 4 5

(2) 如图所示的程序用来对这 50 名选手的成绩进行统计．为了便于区别性别，输入时，男选手的成绩数据用正数，女选手的成绩数据用其相反数（负数），请完成图中空白的判断框 ① 处的填写，并说明输出数值 M 和 A 的统计意义．



(1)

答案

4

解析

【分析】：将男选手成绩由好到差编为 $1\sim 24$ 号，再用系统抽样方法从中抽取 6 人，则男选手分为 $\frac{24}{4}=6$ 段，每段抽取 1 人，则其中成绩在区间 $[150,170)$ 上的恰有 4 段，每段 1 人，可得成绩在区间 $[150,170)$ 上的选手人数为 4．

依题意，男选手分为 $\frac{24}{4}=6$ 段，每段抽取 1 人，

其中成绩在区间 $[150,170)$ 上的恰有 4 段，每段 1 人，

$\therefore$ 成绩在区间 $[150,170)$ 上的选手人数为 4．

(2)

答案

50

解析

【分析】：男选手的成绩数据用正数，女选手的成绩数据用其相反数（负数），所以可得条件 ① 处填写 $T>0?$ ，M 表示对男选手的成绩进行累加，W 表示对女选手的成绩的相反数进行累加，所以 $M-W$ 表示 50 位选手的总成绩，$A=\frac{M-W}{50}$ 故 A 的统计意义：50 名选手的平均成绩．$M=\frac{M}{24}$ 所以输出数值 M 的统计意义：24 名男选手的平均成绩．

① 处填写 $T>0?$

M 表示对男选手的成绩进行累加，$M=\frac{M}{24}$

所以输出数值 M 的统计意义：24 名男选手的平均成绩，M 表示对男选手的成绩进行累加，W 表示对女选手的成绩的相反数进行累加，所以 $M-W$ 表示 50 位选手的总成绩，$A=\frac{M-W}{50}$

输出数值 A 的统计意义：50 名选手的平均成绩．

19 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，右焦点坐标为 $(2,0)$，O 为坐标原点.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 若直线 l: $y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，试求实数 k 的取值范围.

(1)

答案

$\frac{x^2}{3}-y^2=1$

解析

【分析】：双曲线右焦点坐标为 $(2,0)$ 可知双曲线的焦点在 x 轴上，设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，$c=2$，又 $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore a^2=3$，$b^2=1$，可得双曲线 C 的标准方程.

依题意，设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，$c=2$，又 $a^2+b^2=c^2$，$\therefore a^2=3$，$b^2=1$，即双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)

答案

$-1<k<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}<k<1$

解析

【分析】：联立 $\begin{cases} y=kx+\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1 \end{cases}$，消去 y 得，$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$，

$\because$ 直线 l 双曲线 C 恒有两个不同的交点，

$\therefore \begin{cases} 1-3k^2\neq 0 \\ \Delta=(-6\sqrt{2}k)^2+36(1-3k^2)=3\times 36(1-k^2)>0 \end{cases}$

$\therefore k^2\neq\dfrac{1}{3}$ 且 $k^2<1$ ①

设 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-9}{1-3k^2}$，

$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2$，代入 x_1x_2，x_1+x_2 可得关于 k 的不等式即可求解.

联立 $\begin{cases} y=kx+\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1 \end{cases}$，消去 y 得，$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$，

$\because$ 直线 l 双曲线 C 恒有两个不同的交点，

$\therefore \begin{cases} 1-3k^2\neq 0 \\ \Delta=\left(-6\sqrt{2}k\right)^2+36(1-3k^2)=3\times 36(1-k^2)>0 \end{cases}$

$\therefore k^2\neq\dfrac{1}{3}$ 且 $k^2<1$ ①

设 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-9}{1-3k^2}$，

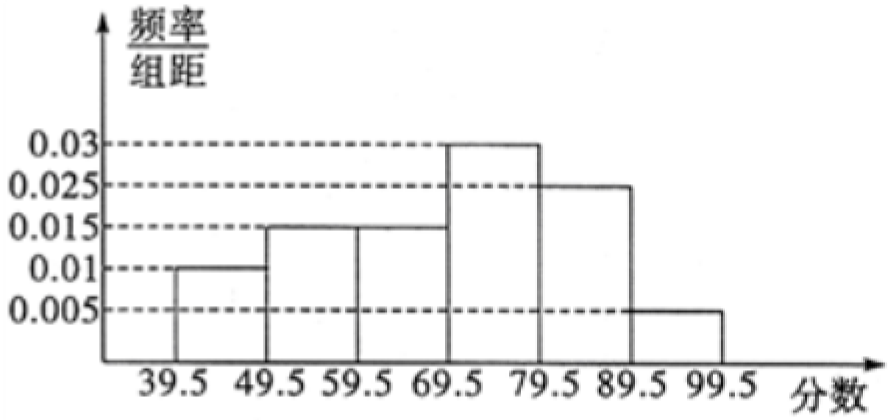
$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2=\dfrac{3k^2+7}{3k^2-1}>0$，

$\therefore k^2>\dfrac{1}{3}$ ②

综上 ①② 得，$-1<k<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<k<1$.

20 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

从参加某次高中英语竞赛的学生中抽出 100 名，将其成绩整理后，绘制频率分布直方图（如图所示）．其中样本数据分组区间为：$[39.5,49.5)$，$[49.5,59.5)$，$[59.5,69.5)$，$[69.5,79.5)$，$[79.5,89.5)$，$[89.5,99.5]$.



(1) 试求图中 a 的值，并计算区间 $[59.5,89.5)$ 上的样本数据的频率和频数;
(2) 试估计这次英语竞赛成绩的众数、中位数及平均成绩（结果精确到 0.1）．
注：同一组数据用该组区间的中点值作为代表

(1)

答案

70

解析

【分析】：根据频率和为 1，即矩形面积和为 1 可得 $a=0.025$，所以区间 $[59.5,89.5)$ 上的样本数据的频率为 $(0.015+0.03+0.025)\times 10=0.70$，频数为 $0.70\times 100=70$.

由图可知，$(0.01+0.015\times 2+0.01+0.03+a+0.005)\times 10=1$，$\therefore a=0.025$.

区间 $[59.5,89.5)$ 上的样本数据的频率为 $(0.015+0.03+0.025)\times 10=0.70$.

频数为 $0.070\times 100=70$.

(2)

答案

70.5

解析

【分析】：根据样本的频率分布直方图，众数在 $[69.5,79.5)$ 的中点处，熟记中位数平均数的公式求出中位数和平均数.

$\because$ 频率最高的是 $[69.5,79.5)$，估计众数为 $69.5+5=74.5$，而中位数是把频率分布直方图分成两个面积相等部分的平行于 Y 轴的直线横坐标，出现 $[69.5,79.5)$ 内，设为 x

$\therefore 0.1+0.15+0.15+0.03x=0.5\Rightarrow x=\dfrac{10}{3}$ 所以中位数为 $69.5+\dfrac{10}{3}=\dfrac{437}{6}\approx 72.8$.

平均成绩为：$44.5\times 0.1+54.5\times 0.15+64.5\times 0.15+74.5\times 0.3+84.5\times 0.25+94.5\times 0.05=70.5$（结果精确到 0.1）

21 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

已知点 F 为抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，点 $D(1,2)$ 为抛物线 C 上一定点.
(1) 直线 l 过点 F 交抛物线 C 于 A、B 两点，若 $|AB|=5$，求直线 l 的方程；
(2) 过点 D 作两条倾斜角互补的直线分别交抛物线 C 于异于点 D 的两点 P，Q 试证明直线 PQ 的斜率为定值，并求出该定值.

(1)

答案

$2x+y-2=0$，或 $2x-y-2=0$

解析

【分析】：依题意，点 F 的坐标为 $(1,0)$．设直线 l 的方程为 $x=my+1$，联立方程组：$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$ ，消去 x 并整理得：$y^2-4my-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$ 故 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=4(m^2+1)=5$ 解得 m，写出直线 l 的方程.

依题意，点 F 的坐标为 $(1,0)$．设直线 l 的方程为 $x=my+1$，联立方程组：$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$ ，消去 x 并整理得：$y^2-4my-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$ 故

$|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2=4(m^2+1)=5$

解得 $m=\pm\dfrac{1}{2}$.

故直线 l 的方程为 $2x+y-2=0$，或 $2x-y-2=0$.

(2)

答案

1

解析

【分析】：过点 D 作两条倾斜角互补的直线分别交抛物线 C 于异于点 D 的两点 P，Q 设直线 DP 的斜率为 $k(k\neq0)$，则直线 DQ 的斜率为 $-k$．令 $t=\dfrac{1}{k}$，联立方程组：$\begin{cases}x-1=t(y-2)\\y^2=4x\end{cases}$ ，消去 x 并整理得：$y^2-4ty+8t-4=0$ 设 $P(x_P,y_P)$，因为点 D 的坐标为 $(1,2)$，所以 $2y_P=8t-4$，故 $y_P=4t-2$，用 $-t$ 去换点 P 坐标中的 t 可得点 Q 的坐标为 $(4t^2+4t+1,-4t-2)$，计算直线 PQ 的斜率即可.

设直线 DP 的斜率为 $k(k\neq0)$，则直线 DQ 的斜率为 $-k$．令 $t=\dfrac{1}{k}$，联立方程组：$\begin{cases}x-1=t(y-2)\\y^2=4x\end{cases}$ ，消去 x 并整理得：$y^2-4ty+8t-4=0$ 设 $P(x_P,y_P)$，因为点 D 的坐标为 $(1,2)$，所以 $2y_P=8t-4$ ，故 $y_P=4t-2$，从而点 P 的坐标为 $(4t^2+4t+1,4t-2)$，用 $-t$ 去换点 P 坐标中的 t 可得点 Q 的坐标为 $(4t^2+4t+1,-4t-2)$，所以直线 PQ 的斜率为 $\dfrac{(-4t-2)-(4t-2)}{(4t^2+4t+1)-(4t^2-4t+1)}=-1$.

备注

【点睛】：本题考查了直线与抛物线的位置关系，熟练掌握弦长公式注意计算的准确性，由抛物线上的点作两条倾斜角互补的直线，可得两条直线的斜率互为相反数，设为 k，$-k$，在联立直线与抛物线时本题巧妙的设 $t=\frac{k}{1}$ 可简化运算，处理方法值得借鉴.

22 **2018年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷**

已知 A 是圆 C：$x^2+y^2=4$ 上任意一点，过 A 作 x 轴的垂线段 AD，D 为垂足．当点 A 在圆 C 上运动时，线段 AD 中点 B 的轨迹为曲线 t（包括点 $(-2,0)$ 和点 $(2,0)$），O 为坐标原点．

(1) 求曲线 t 的方程；

(2) 直线 l 与曲线 t 相切，且 l 与圆 C 相交于 P，Q 两点，当 $\triangle POQ$ 的面积最大时，试求直线 l 的方程．

(1)

答案

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

解析

【分析】：设线段 AD 中点 $B(x,y)$，$A(x',y')$，则 $\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{y}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}x'=x\\ y'=2y\end{cases}$，代入 $x'^2+y'^2=4$，包括点 $(-2,0)$ 和点 $(2,0)$，得 $x^2+4y^2=4$，即得曲线 t 的方程．

设线段 AD 中点 $B(x,y)$，$A(x',y')$，则 $\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{y}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}x'=x\\ y'=2y\end{cases}$，代入 $x'^2+y'^2=4$，包括点 $(-2,0)$ 和点 $(2,0)$，得 $x^2+4y^2=4$，

$\therefore$ 曲线 t 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．

(2)

答案

$x-\sqrt{2}y+\sqrt{6}=0$ 或 $x-\sqrt{2}y-\sqrt{6}=0$ 或 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{6}=0$ 或 $x+\sqrt{2}y-\sqrt{6}=0$

解析

【分析】：当直线 l 的斜率不存在时，不合题意，故设 l 方程为 $y=kx+m$，联立 $x^2+4y^2=4$，得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，因为直线 l 与曲线 t 相切，所以

$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=0$

$\therefore m^2=4k^2+1$．又点 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，且 $|PQ|=2\sqrt{4-d^2}$，表示

$S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d=d\sqrt{4-d^2}=\sqrt{4d^2-d^4}=\sqrt{4-(d^2-2)^2}\leqslant 4$ 即得解．

当直线 l 的斜率不存在时，不合题意，故设 l 方程为 $y=kx+m$，

联立 $x^2+4y^2=4$，得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=0$

$\therefore m^2=4k^2+1$．

又点 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，且 $|PQ|=2\sqrt{4-d^2}$，

$\therefore S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d=d\sqrt{4-d^2}=\sqrt{4d^2-d^4}=\sqrt{4-(d^2-2)^2}\leqslant 4$，当 $d^2=2$ 即 $d=\sqrt{2}$ 时，

$\triangle POQ$ 的面积最大为 4，

$\therefore d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{4k^2+1}}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，解得 $k^2=\dfrac{1}{2}$，$\therefore k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$m=\pm\sqrt{3}$

此时直线 l 有 4 条，方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{3}$ 或 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{3}$．（或一般方程为：$x-\sqrt{2}y+\sqrt{6}=0$ 或 $x-\sqrt{2}y-\sqrt{6}=0$ 或 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{6}=0$ 或 $x+\sqrt{2}y-\sqrt{6}=0$）．

备注

【点睛】：本题第一问考查了轨迹方程的求法，利用相关点法；第二问考查了直线与圆锥曲线的位置关系，直线与椭圆相切，则判别式等于 0，直线与圆相交得到的三角形面积利用弦长及圆心到直线的距离可表示，构建二次函数可求最值，要注意计算的准确性．